

Soluzione esercitazione 6

A. Dall'esercitazione 5 sappiamo che la concentrazione media di zinco nel campione di $n = 12$ pesci è pari a $\bar{x} = 9,188$, mentre la varianza campionaria è pari a $s^2 = 1,386$.

1. Sia $H_0 : \mu = 10$ verso $H_1 : \mu \neq 10$ al livello $\alpha = 0,1$. La statistica test:

$$t = \frac{9,188 - 10}{\sqrt{1,386/12}} = -2,39$$

che deve essere confrontata con il valore critico $t_{0,1/2;12-1} = 1,796$. Essendo $|t| > t_{0,1/2;12-1}$ si rifiuta H_0 al livello $\alpha = 0,1$.

2. Il livello di significatività osservato si calcola come segue:

$$\alpha_{oss} = 2P(T_{12-1} > |t|) = 2P(T_{12-1} > |-2,39|) = 0,0359$$

ed essendo $\alpha_{oss} < \alpha$ si rifiuta l'ipotesi nulla.

B. Il consumo medio mensile di gas (in Kw) per il campione di famiglie del comune di Perugia e la varianza campionaria sono le seguenti: $\bar{x} = 479,27$, $s^2 = 59181,34$.

1. Si intende verificare l'ipotesi

$$H_0 : \mu = 400$$

$$H_1 : \mu > 400$$

al livello $\alpha = 0,05$. La statistica test è la seguente:

$$z = \frac{479,27 - 400}{\sqrt{59181,34/173}} = 4,286$$

Essendo n sufficientemente grande, il livello di significatività osservato si calcola come segue:

$$\alpha_{oss} = P(Z > z) = P(Z > 4,286) \approx 0$$

dove Z è una v.c. normale standardizzata. Quindi, $\alpha_{oss} < \alpha$ e si rifiuta l'ipotesi nulla.

2. La potenza del test per il sistema d'ipotesi di cui al punto precedente con $\sigma = 200$ e per un valore sotto ipotesi alternativa $H_1 : \mu = 500$ è pari a:

$$\pi = 1 - \Phi\left(\frac{\mu_0 - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} + z_\alpha\right) = 1 - \Phi\left(\frac{400 - 500}{\sqrt{200^2/173}} + 1,645\right) = 1 - \Phi(-4,93) = \Phi(4,93) \approx 1$$

C. Dal testo dell'esercizio è noto che $n = 84$, $\bar{x} = 52,54$ e $s^2 = 450,43$.

1. Si intende verificare l'ipotesi

$$H_0 : \mu = 60$$

$$H_1 : \mu < 60$$

al livello $\alpha = 0,01$. La statistica test è la seguente:

$$z = \frac{52,54 - 60}{\sqrt{450,43/84}} = -3,22$$

che deve essere confrontata con il valore critico $z_{0,01} = 2,326$. Essendo $z < -z_{0,01}$ si rifiuta H_0 al livello $\alpha = 0,01$.

2. Si intende verificare l'ipotesi

$$H_0 : \sigma^2 = 500$$

$$H_1 : \sigma^2 \neq 500$$

al livello $\alpha = 0,05$. La statistica test è la seguente:

$$v = \frac{(84 - 1)450,43}{500} = 74,77$$

che deve essere confrontata con i valori critici $\chi_{1-0,05/2;83}^2 = 59,69$ e $\chi_{0,05/2;83}^2 = 110,09$. Dal momento che $v = 74,77 \in (59,69; 110,09)$ non si rifiuta H_0 al livello $\alpha = 0,05$.

D. La proporzione di clienti che si sono dichiarati soddisfatti è pari a $\hat{p} = 327/398 = 0,8216$. Si intende verificare l'ipotesi

$$H_0 : p = 0,70$$

$$H_1 : p > 0,70$$

al livello $\alpha = 0,01$. La statistica test è la seguente:

$$z = \frac{0,8216 - 0,7}{\sqrt{0,7(1 - 0,7)/398}} = 5,294$$

che deve essere confrontata con il valore critico $z_{0,01} = 2,326$. Essendo $z > z_{0,01}$ si rifiuta H_0 al livello $\alpha = 0,01$.

E.

1. La distribuzione del fatturato è la seguente:

Fatturato	10-49	50-99	100-299	Totale
y_i	29,5	74,5	199,5	
n_i	162	218	20	400

da cui si ottiene la media campionaria $\bar{y} = 62,525$ e la varianza campionaria $s_y^2 = 1461,628$.

Si intende verificare l'ipotesi

$$H_0 : \mu = 60$$

$$H_1 : \mu > 60$$

al livello $\alpha = 0,01$. La statistica test è la seguente:

$$z = \frac{62,525 - 60}{\sqrt{1461,628/400}} = 1,32$$

la quale, essendo n sufficientemente grande, può essere confrontata con $z_{0,01} = 2,326$. Dal momento che $z < z_{0,01}$ non si rifiuta l'ipotesi nulla al livello $\alpha = 0,01$.

2. La potenza del test per il sistema d'ipotesi di cui al punto precedente con $\sigma^2 = 1600$ e per un valore sotto ipotesi alternativa $H_1 : \mu = 65$ è pari a:

$$\pi = 1 - \Phi\left(\frac{\mu_0 - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} + z_\alpha\right) = 1 - \Phi\left(\frac{60 - 65}{\sqrt{1600/400}} + 2,326\right) = 1 - \Phi(-0,174) = \Phi(0,174) = 0,5691$$

3. La proporzione di imprese con consumo di energia inferiore a 6, tra quelle con fatturato inferiore a 50, è pari a $\hat{p} = 38/162 = 0,2346$. Si intende verificare l'ipotesi

$$H_0 : p = 0,20$$

$$H_1 : p > 0,20$$

al livello $\alpha = 0,05$. La statistica test è la seguente:

$$z = \frac{0,2346 - 0,2}{\sqrt{0,2(1 - 0,2)/162}} = 1,1$$

che deve essere confrontata con il valore critico $z_{0,05} = 1,645$. Essendo $z < z_{0,05}$ non si rifiuta H_0 al livello $\alpha = 0,05$.

4. La tabella di indipendenza, ottenuta calcolando le frequenze teoriche sotto l'ipotesi di indipendenza $\hat{n}_{ij} = \frac{n_{i0}n_{0j}}{n}$, è la seguente:

Consumo di energia	Classi di fatturato			Totale
	10-49	50-99	100-299	
0-5	16,20	21,80	2,0	40
6-20	85,05	114,45	10,5	210
21-50	60,75	81,75	7,5	150
Totale	162	218	20	400

La statistica test si ottiene come segue:

$$\chi^2 = \frac{(38 - 16,20)^2}{16,20} + \frac{(2 - 21,80)^2}{21,80} + \dots + \frac{(20 - 7,5)^2}{7,5} = 87,57$$

la quale deve essere confrontata con $\chi_{0,01;4}^2 = 13,28$, il quantile della v.c. chi-quadrato con $(3 - 1)(3 - 1) = 4$ gradi di libertà. Essendo $\chi^2 > \chi_{0,01;4}^2$ si rifiuta l'ipotesi nulla di indipendenza tra i due caratteri.