STATISTICA (MODULO II - INFERENZA STATISTICA)

Soluzione esercitazione 3

A. Si definisca la v.c. $X \sim \text{Bin}(n,p)$ con $n = 200$ e $p = 0{,}1$, la quale presenta $\text{E}(X) = np = 200 \times 0{,}1 = 20$ e $\text{Var}(X) = np(1-p) = 200 \times 0{,}1 \times (1-0{,}1) = 18$.

1. La probabilità cercata è $P(X > 25) = 1 - P(X \leq 25)$.

   Il calcolo può essere semplificato ricordando che la v.c. binomiale può essere approssimata con la v.c. normale quando sia np e $np(1-p)$ sono maggiori di 5. Quindi:

   $$P(X \leq 25) \cong \Phi\left(\frac{25 + 0{,}5 - 20}{\sqrt{18}}\right) = \Phi(1{,}2963) = 0{,}9026$$

   dove si è utilizzata la correzione per continuità. Infine, la probabilità cercata è

   $$P(X > 25) = 1 - 0{,}9026 = 0{,}0974$$

2. Per i motivi ricordati al punto precedente, possiamo scrivere:

   $$\begin{aligned} P(10 \leq X \leq 20) &= P(X \leq 20) - P(X < 10) \cong \Phi\left(\frac{20 + 0{,}5 - 20}{\sqrt{18}}\right) - \Phi\left(\frac{10 - 0{,}5 - 20}{\sqrt{18}}\right) \\ &= \Phi(0{,}1178) - \Phi(-2{,}4749) = 0{,}5469 - 0{,}0067 = 0{,}5402 \end{aligned}$$

B. Si definisca la v.c. $X \sim \chi^2(5)$. Quindi:

1. $P(X > 10) = 1 - P(X \leq 10)$

   Dalle tavole della v.c. chi-quadrato con 5 gradi di libertà possiamo ottenere i seguenti valori:
   $P(X \leq 9{,}24) = 0{,}90 \qquad P(X \leq 11{,}07) = 0{,}95$

   Dal momento che nelle tavole non è presente il valore cercato, $P(X \leq 10)$, possiamo calcolarlo tramite un'approssimazione lineare (si veda la nota nel box seguente):

   $$\begin{aligned} &P(X \leq 10) \cong 0{,}90 + \frac{0{,}95 - 0{,}90}{11{,}07 - 9{,}24}(10 - 9{,}24) = 0{,}92 \\ &P(X > 10) \cong 1 - 0{,}92 = 0{,}08 \end{aligned}$$

2. Utilizzando la stessa procedura del punto precedente si ottiene:

   $$P(X \leq 5) \cong 0{,}5 + \frac{0{,}75 - 0{,}50}{6{,}63 - 4{,}35}(5 - 4{,}35) = 0{,}57$$

   Da notare che i valori esatti delle precedenti probabilità calcolati al computer sono, rispettivamente, 0,0752 e 0,5841.

3. Si definisca la v.c. $Y = \sum_{i=1}^{3} X_i$, dove ciascuna $X_i \sim \chi^2(5)$. Per una nota proprietà della v.c. chi-quadrato sappiamo che $Y \sim \chi^2(15)$, da cui è immediato trarre $\text{E}(Y) = 15$.

Un'approssimazione lineare per $F(x) = P(X \leq x)$

Si supponga di conoscere il valore della funzione di ripartizione di una v.c. X per due punti x_1 ed x_2 ($x_1 < x_2$). Indichiamo, rispettivamente, tali valori con $F(x_1)$ e $F(x_2)$. Possiamo calcolare un'approssimazione per un qualsiasi valore x ($x_1 \leq x \leq x_2$) come segue:

$$F(x) = F(x_1) + \frac{F(x_2) - F(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

C. Data la v.c. $Z = \frac{2}{3}X + \frac{1}{3}Y$, si ha:

1. $\mathrm{E}(Z) = \frac{2}{3}\mathrm{E}(X) + \frac{1}{3}\mathrm{E}(Y) = \frac{2}{3}10 + \frac{1}{3}5 = 8{,}33$;
2. $\mathrm{Var}(Z) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \mathrm{Var}(X) + \left(\frac{1}{3}\right)^2 \mathrm{Var}(Y) = \frac{4}{9}2 + \frac{1}{9}1{,}2 = 1{,}02$.

D.

1. Si definisca la v.c. $X = X_1 - 2X_2 \sim N(-2, 40)$. Quindi:
   $P(X > 0) = P\left(Z > \frac{0-(-2)}{\sqrt{40}}\right) = 1 - \Phi(0{,}3162) = 1 - 0{,}624 = 0{,}376$
2. Si definisca la v.c. $T = \frac{X_1/2}{\sqrt{X_3/5}}$, la quale si distribuisce come una t di Student con 5 gradi di libertà. Perciò, dalle tavole si ricava
   $$P\left(T > 1{,}5\right) \cong 0{,}10$$
3. Il quantile richiesto deve soddisfare la probabilità
   $$P\left(\frac{X_1/2}{\sqrt{X_3/5}} > t\right) = P\left(T > t\right) = 0{,}05$$
   dove $T \sim t(5)$. Dalle tavole si ricava $t = 2{,}015$.

E.

1. Sia $X \sim \mathrm{N}(450, 65^2)$, quindi la probabilità che il componente risulti funzionante dopo un anno (365 giorni) è pari a
   $$P(X > 365) = P\left(Z > \frac{365 - 450}{65}\right) = 1 - \Phi(-1{,}31) = 1 - 0{,}0951 = 0{,}9049$$
2. Sia n il numero di componenti richiesto affinché l'apparecchiatura funzioni per almeno tre anni (1095 giorni). Quindi, $Y_n = X_1 + \ldots + X_n \sim \mathrm{N}(n450, n65^2)$. La probabilità cercata è
   $$P(Y_n > 1095) = P\left(Z > \frac{1095 - 450n}{65\sqrt{n}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{1095 - n450}{65\sqrt{n}}\right) \geq 0{,}80$$
   Il quantile z della v.c. normale standardizzata tale che $P(Z > z) = 1 - \Phi(q) = 0{,}80$ è $z = -0{,}8416$. Quindi
   $$-0{,}8416 = \frac{1095 - 450n}{65\sqrt{n}} \qquad \Longrightarrow \qquad 450n - 54{,}704\sqrt{n} - 1095 = 0$$
   Definendo $n = x^2$ si ottiene una funzione quadratica $450x^2 - 54{,}704x - 1095 = 0$ che ha soluzioni pari a
   $$\frac{54{,}704 \pm \sqrt{(-54{,}704)^2 - 4 \times 450 \times (-1095)}}{2 \times 450} = [-1{,}5, 1{,}62]$$
   di cui solo la seconda è ammissibile. Di conseguenza, $n = 1{,}62^2 = 2{,}6244$.

   Quindi, affinché l'apparecchiatura funzioni per almeno tre anni con probabilità dell'80% abbiamo bisogno di almeno 3 componenti. Infatti, se $n = 2$
   $$P(Y_2 > 1095) = 1 - \Phi\left(\frac{1095 - 450 \times 2}{65\sqrt{2}}\right) = 0{,}0169$$
   mentre se $n = 3$
   $$P(Y_3 > 1095) = 1 - \Phi\left(\frac{1095 - 450 \times 3}{65\sqrt{3}}\right) = 0{,}9882$$