

STATISTICA (MODULO II - INFERENZA STATISTICA)  
Soluzione esercitazione 2

**A.**

1.  $P(X \leq 3) = 0,10 + 0,15 + 0,20 + 0,25 = 0,7$
2.  $P(X < 3) = 0,10 + 0,15 + 0,20 = 0,45$
3.  $P(X \geq 3) = 0,25 + 0,20 + 0,06 + 0,04 = 0,55$ , oppure  $P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - 0,45 = 0,55$
4.  $P(2 \leq X \leq 5) = 0,20 + 0,25 + 0,20 + 0,06 = 0,71$
5. Il numero di linee non in uso può essere espresso dalla v.c.  $Y = 6 - X$ . Quindi:  
 $P(Y \geq 4) = P(6 - X \geq 4) = P(X \leq 2) = 0,10 + 0,15 + 0,20 = 0,45$
6.  $E(X) = \sum xf(x) = 0 \times 0,10 + 1 \times 0,15 + \dots + 6 \times 0,04 = 2,64$   
 $\text{Var}(X) = \sum [x - E(X)]^2 f(x) = (0 - 2,64)^2 \times 0,10 + \dots + (6 - 2,64)^2 \times 0,04 = 2,3704$ , oppure  
 $\text{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \sum x^2 f(x) - (\sum xf(x))^2 = 0^2 \times 0,10 + \dots + 6^2 \times 0,04 - 2,64^2 = 2,3704$

**B.** La v.c.  $X$  ha distribuzione binomiale con  $n = 10$  e  $p = 0,05$ .

1. Dalla  $P(X = x) = f(x) = \binom{10}{x} 0,05^x (1 - 0,05)^{10-x}$  si ottiene la seguente tabella:

$X$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f(x)$	0,5987	0,3151	0,0746	0,0105	0,0010	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

2.  $P(X \leq 1) = \sum_{x=0}^1 P(X = x) = 0,9138$
3.  $E(X) = \sum xf(x) = 0 \times 0,59874 + 1 \times 0,31512 + \dots + 10 \times 0 = 0,5$ .  
Oppure, in maniera più immediata, ricordando il valore atteso di una v.c. binomiale:  
 $E(X) = np = 10 \times 0,05 = 0,5$ .
4.  $\text{Var}(X) = \sum [x - E(X)]^2 f(x) = (0 - 0,5)^2 \times 0,59874 + (1 - 0,5)^2 \times 0,31512 + \dots + (10 - 0,5)^2 \times 0 = 0,475$ .  
Oppure, ricordando la formula per la varianza di una v.c. binomiale:  
 $\text{Var}(X) = np(1 - p) = 10 \times 0,05 \times (1 - 0,05) = 0,475$ .  
Quindi,  $\sigma(X) = \sqrt{0,475} = 0,6892$ .

**C.** La v.c.  $X$  ha distribuzione di Poisson con  $\lambda = 8$ , quindi la funzione di probabilità è data da

$$P(X = x) = f(x) = \frac{8^x e^{-8}}{x!},$$

ed inoltre  $E(X) = \text{Var}(X) = 8$ . Quindi:

1.  $P(X \leq 5) = \sum_{x=0}^5 P(X = x) = \frac{8^0 e^{-8}}{0!} + \frac{8^1 e^{-8}}{1!} + \dots + \frac{8^5 e^{-8}}{5!} = 0,1912$
2.  $P(6 \leq X \leq 9) = \sum_{x=6}^9 P(X = x) = 0,5254$
3.  $P(X \geq 10) = 1 - P(X < 10) = 1 - (0,1912 + 0,5254) = 0,2834$
4.  $E(X) = 8$  e  $\sigma(X) = \sqrt{8} \approx 2,8284$ .

**D.** Data  $X \sim N(1,25; 0,46^2)$ , si può calcolare la v.c. normale standardizzata  $Z = \frac{X-1,25}{0,46} \sim N(0; 1)$ . Quindi, con l'utilizzo delle tavole per la normale standardizzata possiamo calcolare le seguenti probabilità:

1.  $P(X \leq 1) = P(Z \leq (1 - 1,25)/0,46) = \Phi(-0,54) = 1 - \Phi(0,54) = 0,2945$
2.  $P(1 \leq X \leq 2) = P(Z \leq (2 - 1,25)/0,46) - P(Z < (1 - 1,25)/0,46) = \Phi(1,63) - \Phi(-0,54) = 0,9485 - 0,2945 = 0,6540$

3. In base ai risultati dei punti precedenti è immediato ottenere  $P(X \leq 2) = 0,9485$ . Di conseguenza la probabilità che un individuo abbia un incidente è pari a  $p = 1 - 0,9485 = 0,0515$ .

Indicando con  $Y$  la v.c. che esprime il numero di assicurati che hanno un incidente su 100 assicurati, cioè  $Y \sim \text{Binomiale}(n = 100; p = 0,0515)$ , la probabilità che più di 5 individui abbiamo un incidente è pari a

$$P(Y > 5) = 1 - P(Y \leq 5) = 1 - 0,5890 = 0,4110$$

$$\text{dove } P(Y \leq 5) = \sum_{y=0}^5 \binom{100}{y} 0,0515^y (1 - 0,0515)^{100-y} = 0,5890.$$

**E.** Utilizzando le tavole si ricava che i quantili della distribuzione normale standardizzata corrispondenti al 25-esimo e al 90-esimo percentile sono, approssimativamente,  $-0,67$  e  $1,28$ . Quindi, i parametri  $\mu$  e  $\sigma$  della distribuzione normale si ottengono risolvendo il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} \frac{1,4 - \mu}{\sigma} = -0,67 \\ \frac{1,8 - \mu}{\sigma} = 1,28 \end{cases}$$

da cui  $\mu = 1,5374$  e  $\sigma = 0,2051$ .

1. Il valore atteso del diametro di un bullone è  $\mu = 1,5374$ .
2. Una misura dell'inaccuratezza del processo è data dalla deviazione standard  $\sigma = 0,2051$ , oppure dalla varianza  $\sigma^2 = 0,2051^2 = 0,0421$ .
3.  $P(X < 1,2) = \Phi\left(\frac{1,2 - 1,5374}{0,2051}\right) = \Phi(-1,645) = 1 - \Phi(1,645) \approx 0,05$
4. La probabilità che un bullone abbia una lunghezza superiore a 2 mm è pari a

$$p = P(X > 2) = 1 - \Phi\left(\frac{2 - 1,5374}{0,2051}\right) = 1 - \Phi(2,2555) \approx 0,01205$$

Il numero di bulloni di lunghezza superiore a 2 mm estratti a caso da un lotto di 10 bulloni può essere descritto dalla v.c.  $Y \sim \text{Binomiale}(n = 10; p = 0,01205)$ . Quindi, la probabilità che estraendo a caso 10 bulloni al massimo 1 di essi abbia lunghezza superiore a 2 mm è pari a

$$P(Y \leq 1) = \sum_{y=0}^1 \binom{10}{y} 0,01205^y (1 - 0,01205)^{10-y} = 0,9938$$