STATISTICA (MODULO II - INFERENZA STATISTICA)

Soluzione esercitazione 1

A. Le probabilità richieste sono:

1. $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$
   $P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$
   $P(\bar{C}) = 1 - P(C) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$
2. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}4 + 0{,}5 - 0{,}25 = 0{,}65$
   $P(A \cap \bar{C}) = P(A) - P(A \cap C) = 0{,}4 - 0{,}2 = 0{,}2$
   $P(A \cup \bar{C}) = P(A) + P(\bar{C}) - P(A \cap \bar{C}) = P(A) + [1 - P(C)] - [P(A) - P(A \cap C)] =$
   $= 1 - P(C) + P(A \cap C) = 1 - 0{,}3 + 0{,}2 = 0{,}9$
3. $P(A|B) = P(A \cap B)/P(B) = 0{,}25/0{,}5 = 0{,}5$
   $P(C|\bar{B}) = P(C \cap \bar{B})/P(\bar{B}) = [P(C) - P(C \cap B)]/[1 - P(B)] = (0{,}3 - 0{,}15)/(1 - 0{,}5) = 0{,}3$

B. Indicando gli eventi D_i ={l'i-esimo pezzo estratto è difettoso} e $\bar{D}_i$ ={l'i-esimo pezzo estratto è buono}, le probabilità richieste sono:

1. $P(D_1 \cap \bar{D}_2) = P(D_1)P(\bar{D}_2|D_1) = 2/10 \times 8/9 = 8/45 = 0{,}1778$
2. $P(\bar{D}_1 \cap D_2) = P(\bar{D}_1)P(D_2|\bar{D}_1) = 8/10 \times 2/9 = 8/45 = 0{,}1778$
3. $P[(D_1 \cap \bar{D}_2) \cup (\bar{D}_1 \cap D_2)] = P(D_1 \cap \bar{D}_2) + P(\bar{D}_1 \cap D_2) = 8/45 + 8/45 = 16/45 = 0{,}3556$
4. $P(D_1 \cap D_2) = P(D_1)P(D_2|D_1) = 2/10 \times 1/9 = 1/45 = 0{,}0222$
5. $P(\bar{D}_1 \cap \bar{D}_2) = P(\bar{D}_1)P(\bar{D}_2|\bar{D}_1) = 8/10 \times 7/9 = 28/45 = 0{,}6222$

C. Essendo gli eventi A e B indipendenti allora

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) = 0{,}0002$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - 0{,}0002$$

da cui essendo $P(A \cup B) = 0{,}03$ si ottiene $P(A) + P(B) = 0{,}03 + 0{,}0002 = 0{,}0302$. Quindi, occorre risolvere il sistema di equazioni:

$$\begin{cases} P(A)P(B) = 0{,}0002 \\ P(A) + P(B) = 0{,}0302 \end{cases} \qquad \begin{cases} - \\ P(A) = 0{,}0302 - P(B) \end{cases} \qquad \begin{cases} P(B)^2 - 0{,}0302P(B) + 0{,}0002 = 0 \\ - \end{cases}$$

La prima uguaglianza da luogo ad un'equazione di secondo grado in una incognita, le cui soluzioni sono

$$\frac{0{,}0302 \pm \sqrt{0{,}0302^2 - 4 \times 0{,}0002}}{2} = \frac{0{,}0302 \pm 0{,}0106}{2} = (0{,}0204; 0{,}0098)$$

Sapendo che $P(A) > P(B)$, si ottiene

$$\begin{cases} P(B) = 0{,}0098 \\ P(A) = 0{,}0302 - 0{,}0098 = 0{,}0204 \end{cases}$$

D. L'efficacia della campagna pubblicitaria può essere valutata verificando che $P(A|B) > P(A|\bar{B})$. Tali probabilità condizionate possono essere calcolate come segue:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A) + P(B|\bar{A})P(\bar{A})} = \frac{0{,}7 \times 0{,}6}{0{,}7 \times 0{,}6 + 0{,}2 \times (1 - 0{,}6)} = \frac{0{,}42}{0{,}5} = 0{,}84$$

$$P(A|\bar{B}) = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{P(\bar{B}|A)P(A)}{1 - P(B)} = \frac{(1 - 0{,}7) \times 0{,}6}{1 - 0{,}5} = \frac{0{,}18}{0{,}5} = 0{,}36$$

Siccome $P(A|B) > P(A|\bar{B})$ possiamo sostenere che la campagna pubblicitaria è stata efficace nel sollecitare il cliente all'acquisto.

E. Si definisca la v.c. $X =$"numero di difetti presenti in un lotto".

1-2. La distribuzione di probabilità della v.c. X e la relativa funzione di ripartizione sono riportate nella seguente tabella:

X	$f(x) = P(X = x)$	$F(x) = P(X \leq x)$
0	3/6	3/6
1	1/6	4/6
2	2/6	1

3. Il valore atteso e la varianza sono pari a:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) &= \sum x f(x) = 0 \times 3/6 + 1 \times 1/6 + 2 \times 2/6 = 0{,}8333 \\
\mathrm{Var}(X) &= \sum (x - \mathrm{E}(X))^2 f(x) = (0 - 0{,}8333)^2 \times 3/6 + (1 - 0{,}8333)^2 \times 1/6 + (2 - 0{,}8333)^2 \times 2/6 = \\
&= 0{,}8056
\end{aligned}$$

oppure

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X) &= E(X^2) - E(X)^2 = \sum x^2 f(x) - \left(\sum x f(x)\right)^2 = \\
&= (0^2 \times 3/6 + 1^2 \times 1/6 + 2^2 \times 2/6) - 0{,}8333^2 = 0{,}8056
\end{aligned}$$