Subject: carattere subesponenziale processo Agosto-Giudici
From: Filippo Palombi <filippo.palombi@enea.it>
Date: 13/03/20, 10:40
To: filippo.palombi@enea.it

Buongiorno,

mi permetto di inserirmi nella discussione relativa allo spam sulla mailing list, producendone un po'.

Stavo pensando stamane che è possibile caratterizzare meglio la natura subesponenziale del processo Agosto-Giudici per $\alpha + \beta < 1$. I calcoli seguenti andrebbero controllati per bene, ma l'idea è che l'intero processo sia maggiorabile con una quantità che può essere stimata. L'utilità del calcolo, come si vedrà, è limitata per fini pratici, tuttavia chiarisce un aspetto teorico del processo.

A tale scopo mi serve richiamare

1. la disuguaglianza di Jensen, che per una funzione **concava** $x \to \phi(x)$ si scrive

(1) $E[\phi(X)] \leq \phi(E[X])$;

2. la funzione $x \to x^{\alpha+\beta}$ è concava per $\alpha + \beta < 1$ e $x > 0$.

Considero un processo di crescita caratterizzato dalla condizione

(2) $E[\lambda_t|\lambda_{t-1}] = C\lambda_{t-1}^{\alpha+\beta}$, dove $\alpha + \beta < 1$.

Voglio stimare il valore atteso non-condizionato $E[\lambda_t]$. Uso (spero correttamente stavolta) la tecnica della media iterata

(3) $E[\lambda_t] = E_{\lambda_{t-1}}[E[\lambda_t|\lambda_{t-1}]] = CE_{\lambda_{t-1}}[\lambda_{t-1}^{\alpha+\beta}|\lambda_{t-1}] \leq C\big(E[\lambda_{t-1}]\big)^{\alpha+\beta}$

Itero esplicitamente una sola volta,

(4)
$$= C\left(E_{\lambda_{t-2}}[E[\lambda_{t-1}|\lambda_{t-2}]\right)^{\alpha+\beta} = C^{1+(\alpha+\beta)}\left(E[\lambda_{t-2}^{\alpha+\beta}]\right)^{\alpha+\beta} \leq C^{1+(\alpha+\beta)}\left(E[\lambda_{t-2}]\right)^{(\alpha+\beta)^2}$$
;

quindi induco

(5) $E[\lambda_t] \leq C^{\sum_{k=0}^{t-1}(\alpha+\beta)^k} E[\lambda_0] = C^{\sum_{k=0}^{t-1}(\alpha+\beta)^k}$

assumendo $\lambda_0 = 1$. La somma ad esponente è una somma geometrica, dunque

(6) $\sum_{k=0}^{t-1}(\alpha+\beta)^k = \frac{1-(\alpha+\beta)^t}{1-(\alpha+\beta)}$.

Concludo che

(7) $\lim_{t\to\infty} E[\lambda_t] \leq C^{1/[1-(\alpha+\beta)]} \equiv K$.

Ovviamente, più $\alpha + \beta$ è prossimo ad 1, più la costante di maggiorazione sarà divergente...ancorché finita... Questo è chiaramente diverso rispetto ad un processo esponenziale, per il quale

(8) $\lim_{t\to\infty} E[\lambda_t] = \infty$.

Faccio solo qualche esempio. Per $C = 1.5$, si ha

$(\alpha + \beta) = 0.9 \quad K = 1.024$,

$$(\alpha + \beta) = 0.95 \quad K \sim 10^6,$$
$$(\alpha + \beta) = 0.99 \quad K \sim 10^{30}.$$

Fine.

Metto le mani avanti: è un calcolo fatto di fretta... Spero di non aver preso cantonate macroscopiche... Forse qualcuno con buona volonta' e tempo da perdere potrebbe controllare.

In ogni caso, cordiali saluti.

f. p.

PS: metto in allegato una versione pdf.

--

Filippo Palombi, PhD

ENEA - Italian Agency for New Technologies,
Energy and Sustainable Economic Development

Via E. Fermi 45
00044 Frascati - Italy