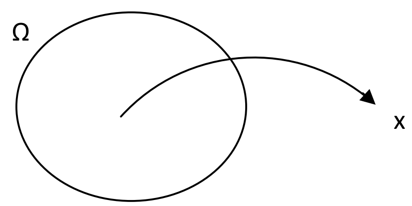
Lezione n. 1 (a cura di Irene Tibidò)

Richiami di statistica

Variabile aleatoria (casuale)

Dato uno spazio campionario Ω che contiene tutti i possibili esiti di un esperimento casuale, la variabile aleatoria X è quella funzione che associa un numero reale ad ogni possibile esito dell'esperimento.



Variabile aleatoria continua

Si dice continua quando può assumere un qualsiasi valore reale in un certo intervallo.

Alcuni esempi sono l'altezza in cm di uno studente e il tempo che impiega una lampadina per smettere di funzionare.

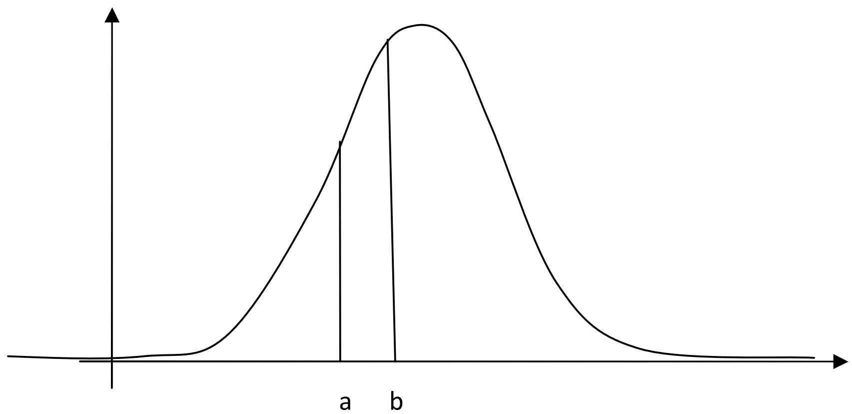
Distribuzione di una v.c. continua.

Per descrivere la v.c continua ci serviamo della sua funzione di densità in cui assegniamo una certa probabilità ad ogni x. In particolare cerchiamo la P(a≤X≤b) ricordando che non ha sensi scrivere P(X=a) poiché è uguale a zero.

La funzione di densità f(x) è una funzione matematica che ha le seguenti caratteristiche:

1. $f(x) \geq 0$, $\forall$ x .
2. $\int_{l_1}^{l_2} f(x)dx = 1$ dove l_1 è il valore più piccolo che si può trovare mentre l_2 quello più grande.
3. $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$.

Graficamente si può rappresentare in questo modo:



Si può notare che è verificata la caratteristica 1 perché la funzione si trova nel semipiano positivo del grafico, la 2 perché l'area sottostante la curva è pari ad uno; per quel che riguarda la terza caratteristica sappiano che la $P(a \le X \le b)$ è uguale all'area compresa tra a e b. Inoltre possiamo affermare con certezza che tale probabilità è compresa tra 0 e 1.

Esempio

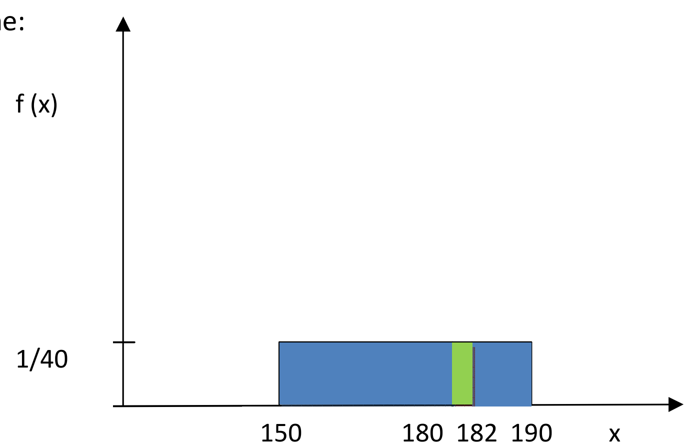
Data una v.c. del tipo

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{l_1 - l_2}, & l_1 \le x \le l_2 \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e sapendo che $l_1 = 150$ e $l_2 = 190$, possiamo scrivere

$$f(x) = \begin{cases} 1/40, & 150 \le x \le 190 \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Ora verifichiamo che sia una funzione di densità procedendo con la verifica delle sue caratteristiche:



1. è sempre maggiore di zero.

2. ∫ f (x)= 1 poiché l'area del rettangolo blu può essere calcolata come segue A = 40 x 1/40= 1.

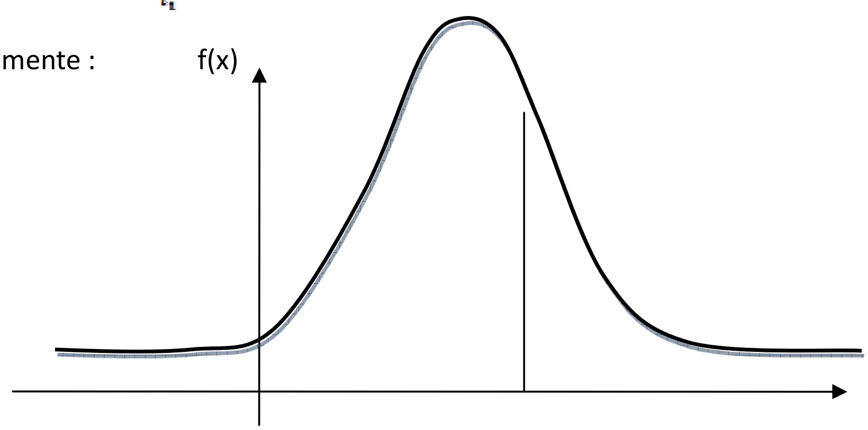
3. Posti a =180 e b = 182 la P (180 ≤ X ≤ 182)= 2 x 1/40 = 0,05. Ciò sta a significare che c'è una probabilità dello 0,05 che estraendo a caso uno studente esso sia alto tra 180 e 182.

Funzione di ripartizione F(x)

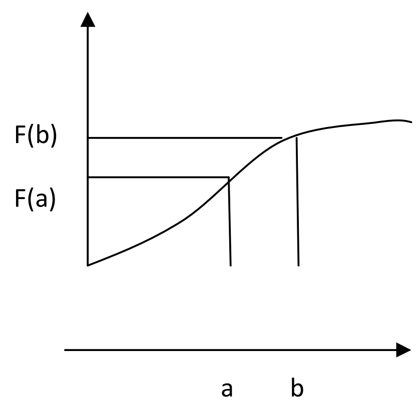
Esprime la probabilità che la v.c. sia minore od uguale ad un certo numero.

$$F(x) = P(X \le x) = \int_{-l_1}^{x} f(t)dt$$

Graficamente :



Possiede le seguenti proprietà:



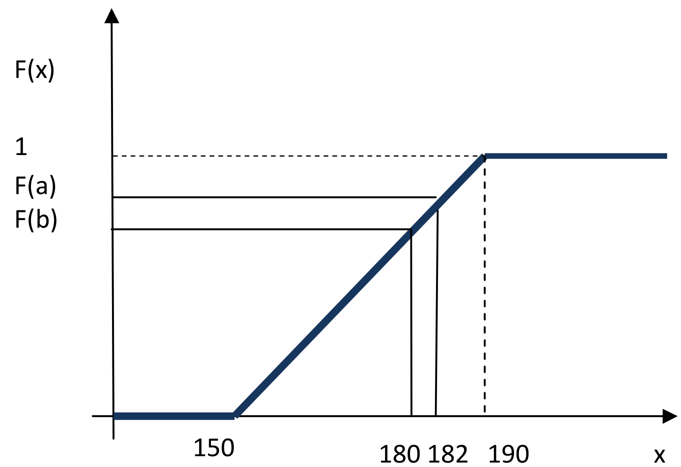
1. $0 \le F(x) \le 1$, $\forall x$
2. F(x) non decrescente.

Ci permette di calcolare la probabilità in intervalli

$$P(a \le X \le b) = P(X \le b) - P(X \le a) = F(b) - F(a)$$

Nel caso di una v.c. uniforme possiamo scrivere:

$$F(x) = \begin{cases} 0\,, \quad x < 150 \\ \int^{x} f(t)dt\,.\,150 < \\ 1, \quad x > 190 \end{cases}$$



$$\int_{150}^{x} \frac{1}{40} dt = \frac{x-150}{40}$$

Si può usare per calcolare per calcolare

$$P\,(\,180 \le x \le 182\,) = F\,(182) - F\,(180) = \frac{182-150}{40} - \frac{182-150}{40} = 0{,}05$$

<u>Media e varianza</u>

La distribuzione di una v.c. può essere descritta attraverso degli indici tra cui:

1) Valore atteso(media) — $E(x) = \mu$

$$E(x) = \int_{l_1}^{l_2} x\,f(x)dx$$

2) Varianza — $V(x) = \sigma^2$

$$V(x) = \int_{l_1}^{l_2} (x-\mu)^2\,f(x)dx$$

E’ una misura di dispersione dei valori osservati rispetto alla media;maggiore è V(x) più è cresce la differenza tra i valori osservati.

Se $V\,(\,x\,) = 0$ allora troveremo un solo valore che coincide con la media.

3) Deviazione standard — $\sqrt{\sigma^2} = \sigma$

$$\sigma = \sqrt{\int_{l_1}^{l_2} (x-\mu)^2 f(x)dx}$$

Il vantaggio della deviazione standard è quello di essere espresso nella stessa unità di misura della v.c.

Esempio

$$E(x) = \int_{150}^{190} \frac{1}{40} x \, dx = \frac{150+190}{2} = 170$$

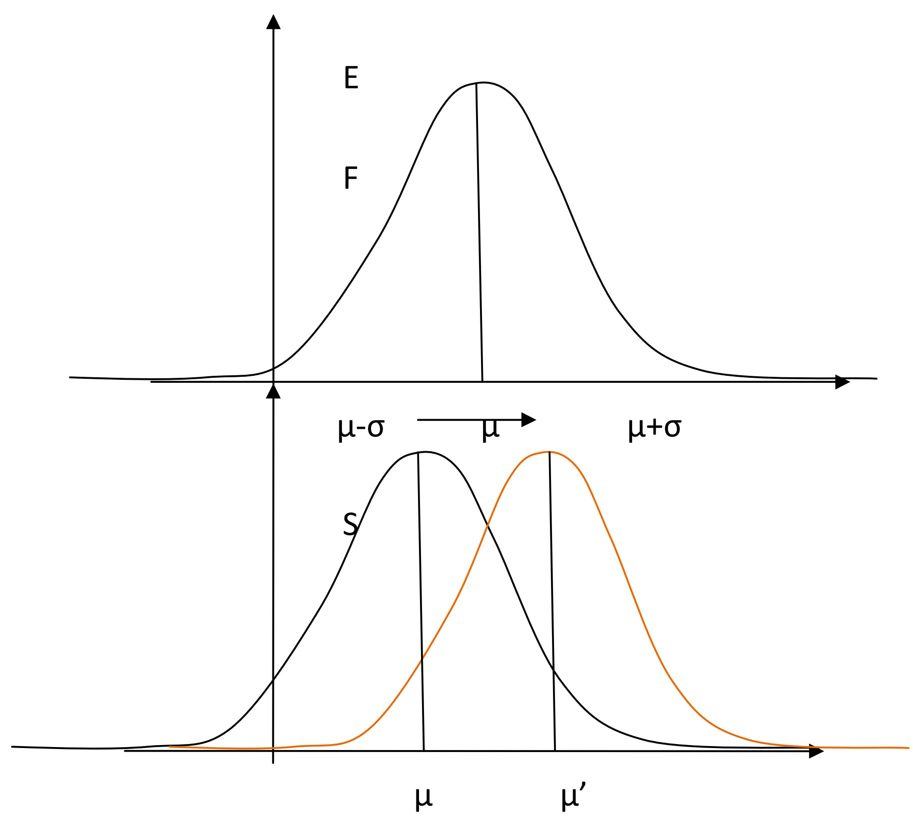
<u>Distribuzione normale</u> $N(\mu;\sigma^2)$

Si usa per v.c. continue che possono assumere un valore in un insieme (R).

La funzione di densità è $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$ dove μ e σ sono i parametri della distribuzione.

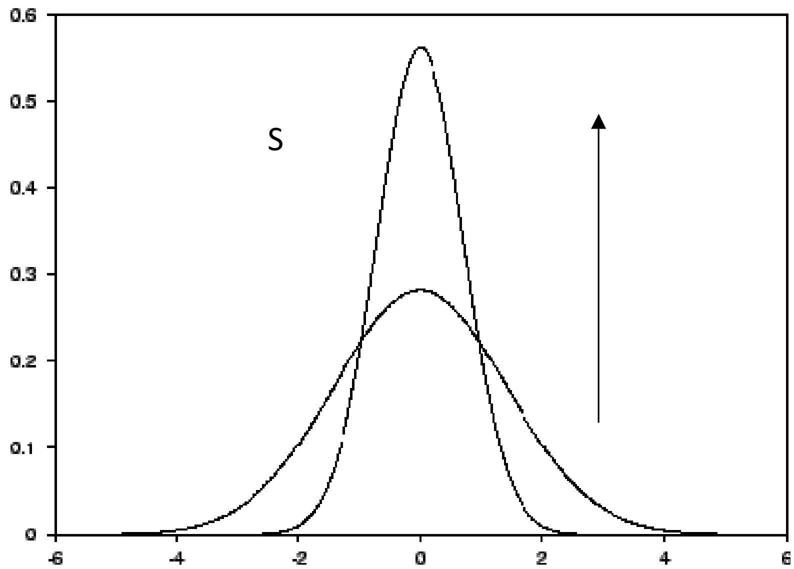
Le caratteristiche sono:

- (x) = μ ; V(x) = σ^2
- orma a campana,centrata intorno a μ e simmetrica. Ha 2 punti di flesso in μ- σ e in μ+σ.
- e μ varia allora la curva si sposta a destra o a sinistra senza modificare la sua forma. In



particolare se μ aumenta la curva si sposa verso destra,se diminuisce verso sinistra.

- e varia σ^2 ,invece cambia la forma. In particolare se σ^2 aumenta allora la curva si sposa verso il basso,poiché i valori che possiamo trovare sono più lontani rispetto a μ. Se σ^2 diminuisce invece i valori si concentrano intorno a μ e la curva diventa più alta.

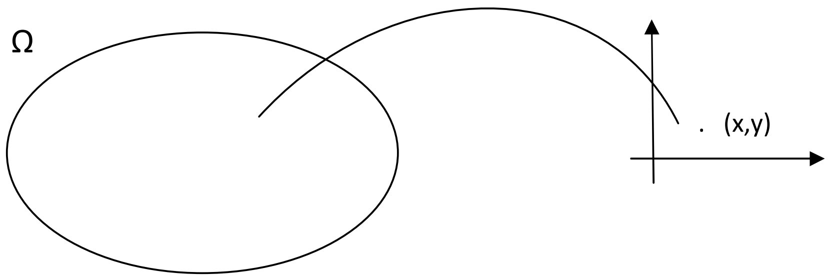


In una distribuzione normale $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ per calcolare P(a≤x≤b) devo operare un’operazione di standardizzazione

$$P(a \leq x \leq b) = F(a) - F(b) = \phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

Variabile casuale doppia

E' una funzione matematica che associa ad ogni esito di un esperimento una coppia di numeri reali.



Variabile casuale doppia continua

Si dice continua quando può assumere qualsiasi valore in un certo insieme reale.

La funzione di densità ad esse associata è del tipo f(x,y) ed ha le seguenti caratteristiche:

1. f (x,y)≥0 ,$\forall x$
2. $\iint_{l_1}^{l_2} f(x,y)dxdy = 1$
3. $P(a \leq X \leq b, \qquad c \leq Y \leq d) - \int_a^b \int_c^d f(x,y)dx,dy$

Esempio

Estraggo uno studente con un peso compreso tra 180 e 182 e che non pesi più di 80 Kg.

P(180≤ x ≤182,y≥ 80) = 0,02

Si può anche scrivere come P(180< x <182,y> 80) = 0,02 perché per valori precisi come 182 la probabilità è zero.